

Основные уравнения теории упругости**Физические уравнения теории упругости**

Для линейно-упругих изотропных тел физическими уравнениями являются соотношения обобщенного закона Гука, известные из курса сопротивления материалов:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu (\sigma_y + \sigma_z)], \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu (\sigma_z + \sigma_x)], \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu (\sigma_x + \sigma_y)], \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где E и G — модули упругости при растяжении и сдвиге, а μ — коэффициент Пуассона. Для изотропного материала они связаны зависимостью

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad (2)$$

Уравнения (1) дают возможность вычислить деформации, если известны напряжения. Назовем их законом Гука в прямой форме. В ходе решения задач теории упругости возникает необходимость в обратных соотношениях, когда напряжения выражены через деформации. Для этого надо разрешить уравнения (1) относительно напряжений. Запишем первую строку (1) в виде

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + \mu \sigma_x]. \quad (3)$$

Из курса сопротивления материалов известно следующее выражение для относительной объемной деформации элемента:

$$\Theta = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad (4)$$

Заменяя в (3) сумму $(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ на величину, найденную из (4), и разрешая (3) относительно σ_x с учетом (2), получим вместо равенств (1) закон Гука в обратной форме:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2G\varepsilon_x + \lambda\Theta; \quad \sigma_y = 2G\varepsilon_y + \lambda\Theta; \quad \sigma_z = 2G\varepsilon_z + \lambda\Theta; \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}; \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}; \quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx}, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где $\Theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$, а через λ обозначена новая константа, называемая параметром Ляме:

$$\lambda = \frac{2\mu G}{1-2\mu} = \frac{\mu E}{(1-2\mu)(1+\mu)}. \quad (6)$$

Сводка основных уравнений теории упругости

В предыдущих лекциях получены три группы формул, которые образуют основные уравнения теории упругости.

1. Статические уравнения. В эту группу входят дифференциальные уравнения равновесия:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

и условия на поверхности:

$$\left. \begin{aligned} X_v &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n; \\ Y_v &= \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n; \\ Z_v &= \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

2. Геометрические уравнения. В эту группу входят геометрические соотношения Коши:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

и уравнения неразрывности деформаций:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}; \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z \partial x}; \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

3. Физические уравнения. В эту группу входят формулы закона Гука либо в прямой форме:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]/E, & \gamma_{xy} &= \tau_{xy}/G; \\ \varepsilon_y &= [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]/E, & \gamma_{yz} &= \tau_{yz}/G; \\ \varepsilon_z &= [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]/E, & \gamma_{zx} &= \tau_{zx}/G, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

либо в обратной форме:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x, & \tau_{xy} &= \mu\gamma_{xy}; \\ \sigma_y &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_y, & \tau_{yz} &= \mu\gamma_{yz}; \\ \sigma_z &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_z, & \tau_{zx} &= \mu\gamma_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Имея эти зависимости, можно приступить непосредственно к решению задачи теории упругости о напряжениях и деформациях, возникающих в упругом изотропном теле под действием внешних сил.

Постановка задач теории упругости

Прямая задача теории упругости

Дано упругое тело, на которое наложены некоторые связи и действуют известные объемные и поверхностные силы. Требуется определить перемещения, деформации и напряжения во всех точках тела.

В некоторых случаях на поверхности тела могут быть заданы не усилия, а перемещения. Или на части границы заданы усилия, а на другой части – перемещения.

Таким образом, требуется найти:

три составляющие перемещения

$$u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z),$$

шесть составляющих напряжений

$$\sigma_x(x, y, z), \sigma_y(x, y, z), \sigma_z(x, y, z), \tau_{xy}(x, y, z), \tau_{yz}(x, y, z), \\ \tau_{zx}(x, y, z);$$

и шесть составляющих деформаций

$$\varepsilon_x(x, y, z), \varepsilon_y(x, y, z), \varepsilon_z(x, y, z), \gamma_{xy}(x, y, z), \gamma_{yz}(x, y, z), \\ \gamma_{zx}(x, y, z).$$

Для отыскания этих функций располагаем 15 уравнениями: тремя дифференциальными уравнениями равновесия (7), шестью геометрическими соотношениями Коши (9) и шестью формулами закона Гука (11) или (12). Таким образом, с математической точки зрения задача может быть решена и сводится к интегрированию указанных 15 уравнений при удовлетворении условий на поверхности (8).

Кирхгофом в 1859 году была доказана теорема о единственности решения прямой задачи теории упругости.

Аналитическое решение прямой задачи в общем случае невозможно. Лишь для некоторых частных случаев получены точные решения. Эти решения используются как эталонные, с которыми можно сравнить приближенные решения, полученные с

Лекция №4 (Теория упругости)

помощью введения определенных дополнительных гипотез, а также оценить точность решений, полученных численными методами.

Обратная задача теории упругости

В этом случае задаются функциями перемещений или напряжений и определяют, каким внешним нагрузкам соответствует рассматриваемое напряженно-деформируемое состояние.

Эта задача особенно легко решается, если заданы перемещения u, v, w во всех точках тела, включая границу. В этом случае из уравнений Коши находим деформации, затем из закона Гука в обратной форме определяем напряжения. Внешние объемные и поверхностные нагрузки определяются из уравнений равновесия и условий на границе. Обратная задача проще прямой, но не имеет практического значения.

Методы решения прямой задачи теории упругости

Решение задачи теории упругости в перемещениях

Для отыскания неизвестных трех составляющих перемещения $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ необходимо иметь три уравнения, которые можно получить из дифференциальных уравнений равновесия (7), выразив в них напряжения через перемещения. Воспользуемся первым уравнением (7) и подставим в него напряжения из формул закона Гука (12). В результате получим

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial \epsilon_x}{\partial x} + \mu \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} + \mu \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} + X = 0.$$

Затем в записанное уравнение подставим значения деформаций (9). После группировки слагаемых находим

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) + X = 0. \quad (a)$$

Выражение в первых скобках можно обозначить сокращенно:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \nabla^2 u. \quad (13)$$

Этот дифференциальный оператор называется оператором Лапласа над функцией $u(x, y, z)$ и читается «набла два u ».

Выражение, стоящее во вторых скобках, можно упростить следующим образом:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial x}.$$

После указанных сокращений и упрощений уравнение (a) принимает вид

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + X = 0.$$

Аналогично преобразуем и два других дифференциальных уравнения равновесия (7). Таким образом, получаем систему уравнений для решения задачи теории упругости в перемещениях:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + X &= 0; \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v + Y &= 0; \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w + Z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Эти уравнения называются *уравнениями Ламе*. Они объединяют статические, геометрические и физические предпосылки теории упругости, рассмотренные в предыдущих главах. Действительно, в них содержатся условия равновесия каждого элемента тела, геометрические характеристики деформации u, v, w, θ и физические характеристики материала λ и μ .

Так же как уравнения равновесия, преобразуем условия на поверхности. Для этого в первое уравнение (8) подставим выражения напряжений через деформации (12):

$$X_v = (\lambda \theta + 2\mu e_x)l + \mu \gamma_{xy}m + \mu \gamma_{xz}n.$$

Подставим сюда значения деформаций (9) и сгруппируем все члены следующим образом:

$$X_v = \lambda \theta l + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial u}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial z} n \right) + \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial y} m + \frac{\partial v}{\partial z} n \right). \quad (6)$$

Выражение в первых скобках представляет собой производную функции $u(x, y, z)$ по направлению нормали v к поверхности тела. Действительно, вычисляя частную производную сложной функции $u(x, y, z)$ по переменной v , получаем

$$\frac{\partial u}{\partial v} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dv} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dv} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dv}.$$

Производные координат по v представляют собой соответствующие направляющие косинусы нормали v :

Таким образом,

$$\frac{\partial u}{\partial v} = \frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial u}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial z} n$$

и уравнение (6) принимает вид

$$X_v = \lambda \theta l + \mu \frac{\partial u}{\partial v} + \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial y} m + \frac{\partial v}{\partial z} n \right). \quad (в)$$

Точно так же можно преобразовать два других уравнения (8). В результате приходим к следующим трем условиям на поверхности, выраженным через перемещения:

$$\left. \begin{aligned} X_v &= \lambda \theta l + \mu \frac{\partial u}{\partial v} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial x} m + \frac{\partial w}{\partial x} n \right); \\ Y_v &= \lambda \theta m + \mu \frac{\partial v}{\partial v} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} l + \frac{\partial v}{\partial y} m + \frac{\partial w}{\partial y} n \right); \\ Z_v &= \lambda \theta n + \mu \frac{\partial w}{\partial v} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} l + \frac{\partial v}{\partial z} m + \frac{\partial w}{\partial z} n \right). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Теперь можно составить план непосредственного решения задачи теории упругости в перемещениях. Для отыскания трех составляющих перемещения u , v и w необходимо проинтегрировать три уравнения Ламе (14) и удовлетворить условиям на поверхности (15). По найденным перемещениям из геометрических соотношений Коши (9) определяют составляющие деформации, а затем из формул закона Гука (12) — составляющие напряжений.

Решение задачи теории упругости в напряжениях

В дальнейшем круг рассматриваемых задач ограничим случаями, когда объемные силы постоянны по всему объему тела или равны нулю. Это ограничение позволяет значительно упростить некоторые уравнения при решении задач в напряжениях, так как все производные от составляющих объемных сил по координатам x , y , z обращаются в нуль.

При решении задачи теории упругости в напряжениях за основные неизвестные принимают шесть составляющих напряжений: σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} . Для их отыскания трех уравнений равновесия (7) недостаточно. Чтобы получить дополнительные уравнения выразим уравнения неразрывности деформаций (10) через напряжения. Подставляя в первое уравнение (10) выражения деформаций (11), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \mu \left(\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \mu \left(\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} \right) - \\ - 2(1 + \mu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = 0. \end{aligned} \quad (a)$$

Для практического применения уравнение (a) следует преобразовать, исключив из него касательное напряжение τ_{xy} . Для этого продифференцируем первое уравнение равновесия (7) по x , второе — по y , третье — по z . Складывая почленно два первых из полученных уравнений и вычитая третье, находим

$$-2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2}. \quad (б)$$

Подставляя соотношение (б) в уравнение (a), получаем

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} - \mu \nabla^2 \sigma_z = 0.$$

Прибавим и вычтем в этом уравнении $\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial z^2}, \nabla^2 \sigma_z$.

$$\left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial z^2} \right) + \nabla^2 \sigma_z - \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} -$$

$$-\nabla^2 \sigma_z - \mu \nabla^2 \sigma_z = 0,$$

$$\nabla^2 \sigma_x + \nabla^2 \sigma_y + \nabla^2 \sigma_z - \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) - (1 + \mu) \nabla^2 \sigma_z = 0,$$

$$\nabla^2 I_1 - \frac{\partial^2 I_1}{\partial z^2} - (1 + \mu) \nabla^2 \sigma_z = 0. \quad (B)$$

Здесь $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа, $I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ — первый инвариант тензора напряжений. Покажем, что

$$\nabla^2 I_1 = \nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = 0.$$

Продифференцировав первое уравнение Ламе (14) по x , второе — по y , третье — по z и почленно сложив, получим

$$(\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) + \mu \left(\frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 u + \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 v + \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 w \right) = 0. \quad (Г)$$

Выражение, стоящее в первых скобках, представляет собой оператор Лапласа над функцией θ :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \nabla^2 \theta.$$

Выражение во вторых скобках можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 u + \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 v + \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 w = \nabla^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \nabla^2 \theta.$$

Тогда вместо уравнения (а) получим

$$(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \theta = 0,$$

или

$$\nabla^2 \theta = 0. \quad (Д)$$

Здесь $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1-2\mu}{E} \cdot I_1$ — коэффициент объемного расширения. Подставляя в (д), получим

$$\nabla^2 I_1 = 0. \quad (е)$$

С учетом (е) из (в) найдем

$$(1 + \mu) \nabla^2 \sigma_z + \frac{\partial^2 I_1}{\partial z^2} = 0.$$

Аналогично можно преобразовать остальные уравнения неразрывности деформаций (10). В результате получим шесть уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (1 + \mu) \nabla^2 \sigma_x + \frac{\partial^2 I_1}{\partial x^2} &= 0, \quad (1 + \mu) \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{\partial^2 I_1}{\partial x \partial y} = 0; \\ (1 + \mu) \nabla^2 \sigma_y + \frac{\partial^2 I_1}{\partial y^2} &= 0, \quad (1 + \mu) \nabla^2 \tau_{yz} + \frac{\partial^2 I_1}{\partial y \partial z} = 0; \\ (1 + \mu) \nabla^2 \sigma_z + \frac{\partial^2 I_1}{\partial z^2} &= 0, \quad (1 + \mu) \nabla^2 \tau_{zx} + \frac{\partial^2 I_1}{\partial z \partial x} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Эти уравнения получены в 1892 г. итальянским математиком Е. Бельтрами. В 1899 г. австралиец Дж. Мичелл вывел аналогичные уравнения для общего случая, когда объемные силы не постоянны и, следовательно, в правую часть уравнений вместо нулей входят члены, содержащие производные от объемных сил. Поэтому часто уравнения (16) называют уравнениями Бельтрами—Мичелла.

Таким образом, для решения задачи теории упругости в напряжениях приходится интегрировать девять уравнений (7) и (16). Наличие трех лишних уравнений необходимо для получения однозначного решения, что обсуждалось при выводе уравнений неразрывности деформаций (10), следствием которых являются уравнения Бельтрами—Мичелла.

Полученные после интегрирования шесть составляющих напряжений должны удовлетворять условиям на поверхности (8). После этого по формулам закона Гука (11) определяют составляющие деформаций, а из геометрических соотношений Коши (9) — составляющие перемещений.

Полуобратный метод Сен-Венана

Решение прямой задачи теории упругости очень сложно и в общем случае невозможно. Обратная постановка задачи часто не соответствует потребностям практики, так как обычно встречаются задачи в прямой постановке. При этом известны граничные условия и требуется определить во всех точках тела напряжения, деформации и перемещения, соответствующие данным граничным условиям.

Сен-Венаном был предложен полуобратный способ, суть которого заключается в том, что при решении задач теории упругости задаются частью перемещений и частью напряжений, а недостающие компоненты определяются из уравнений теории упругости так, чтобы удовлетворялись все уравнения теории упругости и граничные условия.

Этим методом Сен-Венан решил задачи о кручении бруса некруглого сечения и об изгибе бруса.